

Gebrochen rationale Funktionen

Definition: Sind $n(x)$ und $z(x)$ Polynome mit der Variablen x , so nennt man die Funktion

$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ eine **gebrochen rationale Funktion**.

Die Nullstellen des Nennerpolynoms $n(x)$ sind Definitionslücken. Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind Nullstellen der Funktion $f(x)$ wenn sie keine Definitionslücke sind. Die höchste Potenz der Variablen im Nenner- bzw. Zählerpolynom nennt man deren Grad.

Beispiel: $f(x) = \frac{9-x^2}{3x+3}$ hat eine Definitionslücke bei $x=-1$ also $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und zwei Nullstellen $x_1=-3$ und $x_2=3$. Der Grad des Nenners ist 1 und der Zählergrad ist 2.

Faktorisieren: Polynome kann man als Produkt der Form $k \cdot (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \dots$ usw. schreiben. Darin sind a, b, c usw. die Nullstellen des Polynoms; k ist ein Vorfaktor. Faktoriert man Nenner- und Zählerpolynom, kann man die Definitionslücken und die Nullstellen leicht ablesen.

Hebbare Lücken: Funktionen, die nicht vollständig gekürzt sind, können Definitionslücken enthalten, die beim Kürzen entfallen (sogenannte be-„hebbare“). Der Graph der Funktion hat an dieser Stelle ein Loch.

Beispiel: $f(x) = \frac{4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{4x^3 - 7x + 3} = \frac{4 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-0,5) \cdot (x+0,5)}{4 \cdot (x-1) \cdot (x-0,5) \cdot (x+1,5)}$

hat die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 0,5; -1,5\}$ und eine Nullstelle bei $x = -0,5$. Die Definitionslücken bei $x_1=1$ sowie $x_2=0,5$ sind hebbare.

Senkrechte Asymptoten:

Hat f an der Stelle x_0 eine Polstelle, so ist die Gerade $x=x_0$ eine senkrechte Asymptote zu f .

Es gilt:

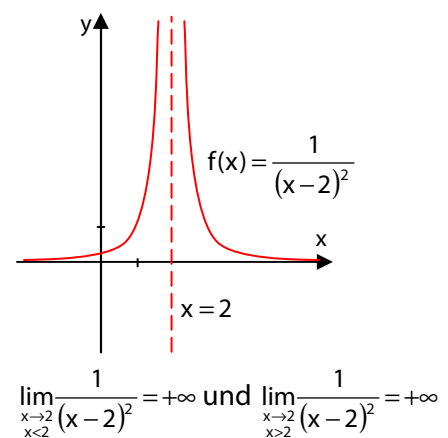
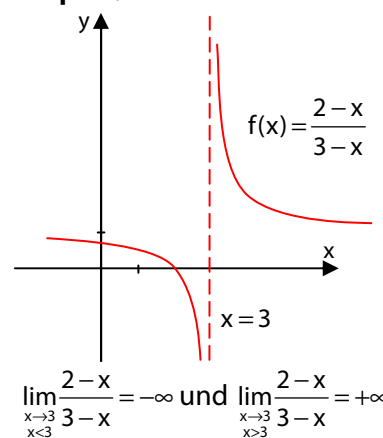
$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ oder } f(x) \rightarrow -\infty$$

für $x \rightarrow x_0$

genauer:

links- und rechtsseitiger Grenzwert muss jeweils gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gehen.

Beispiele:



Waagerechte Asymptoten:

Hat $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ oder/und für $x \rightarrow -\infty$ einen festen Grenzwert k so ist $y=k$ eine waagerechte Asymptote zu f .

Es gilt:

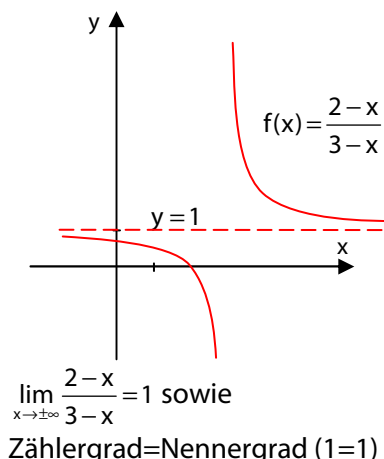
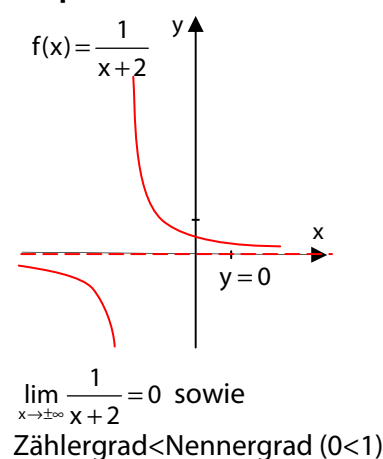
$$f(x) \rightarrow k \quad (k \in \mathbb{R})$$

für $x \rightarrow +\infty$ oder/und $x \rightarrow -\infty$

Ist Zählergrad < Nennergrad, so ist die x -Achse die waagerechte Asymptote: $y=0$.

Ist Zählergrad = Nennergrad, dann gibt es eine andere waagerechte As.: $y=k$.

Beispiele:



Schräge Asymptoten:

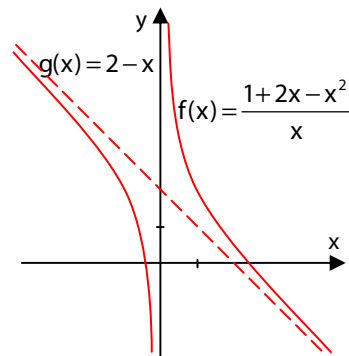
Hat $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ oder/und für $x \rightarrow -\infty$ keinen festen Grenzwert nähert sich aber einer Gerade $g(x)$ immer mehr an, so nennt man diese Gerade (schräge) Asymptote. Es gilt:

$$f(x) \rightarrow g(x)$$

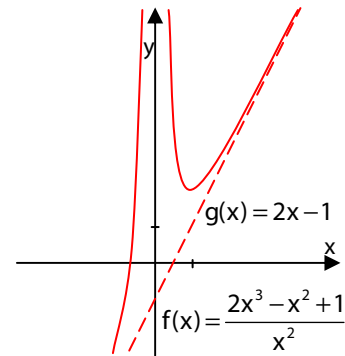
für $x \rightarrow +\infty$ oder/und $x \rightarrow -\infty$
Der Zählergrad muss um eins größer sein als der Nennergrad.

Man berechnet $g(x)$ durch Polynomdivision, die man abbricht, sobald negative Exponenten der Variablen x auftreten.

Beispiele:



$$\begin{aligned} (-x^2+2x+1):x &= -x+2 [+x^{-1}] \\ \rightarrow g(x) &= -x+2 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) &= \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1+2x-x^2}{x} - (-x+2) \right) &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2x^3-x^2+1):x^2 &= 2x-1 [+x^{-2}] \\ \rightarrow g(x) &= 2x-1 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) &= \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3-x^2+1}{x^2} - (2x-1) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Keine Asymptoten:

Ist der Zählergrad $>$ Nennergrad+1 so hat die Funktion weder waagerechte noch schräge Asymptoten.

Übungsaufgaben:

1

Beschreiben Sie das Verhalten in der Umgebung der Definitionslücke; Skizzieren Sie die Graphen.

- a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ d) $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$
e) $f(x) = \frac{2x(2-x)}{x-2}$ f) $f(x) = -\left(\frac{1}{x-2}\right)^2$

2

Erklären Sie, wie man am Term einer gebrochen rationalen Funktion f erkennen kann, dass an einer Definitionslücke x_0 keine senkrechte Asymptote vorliegt.

3

Geben Sie die maximal mögliche Definitionsmenge und die Nullstellen an.

- a) $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$ b) $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \frac{2+x^2}{2-x^2}$ d) $f(x) = 3x^2-2x-1$
e) $f(x) = \frac{2-5x}{6}$ f) $f(x) = \frac{3x+x^2}{x^2-9x+8}$ g) $f(x) = \frac{3}{2x+x^2}$ h) $f(x) = \frac{2^x-3}{1+x^2}$

4

Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten.

- a) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ b) $f(x) = \frac{2x^2-x}{x^2-2}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{(2x+3)(x-5)}$ d) $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$
e) $f(x) = 2x - \frac{2}{x+1}$ f) $f(x) = \frac{x^3-1}{3x+1}$

5

Finden Sie eine gebrochen rationale Funktion

- a) mit Nullstelle $x_0=2$ und Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x_1=-1,5$;
b) mit den Polstellen $x_1=-3$ und $x_2=3$ und der waagerechten Asymptote $y=2$;
c) mit der schrägen Asymptote $y=2x-1$, einer beliebigen Polstelle aber ohne Nullstelle.

Überprüfen Sie die Lösungsvorschläge ggf. mit einer Skizze oder/und einem Funktionsplotter.

6

- a) Gegeben ist $f(x)=x^2+2x-3$. Wie ist der Funktionsterm abzuändern, damit die neue Funktion bei $x=1$ eine Definitionslücke hat, für alle $x \neq 1$ jedoch mit $f(x)$ übereinstimmt?
- b) Gegeben ist $g(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$. Ändern Sie den Term so ab, dass die neue Funktion überall mit $g(x)$ übereinstimmt aber bei $x=-1$ keine Definitionslücke aufweist.

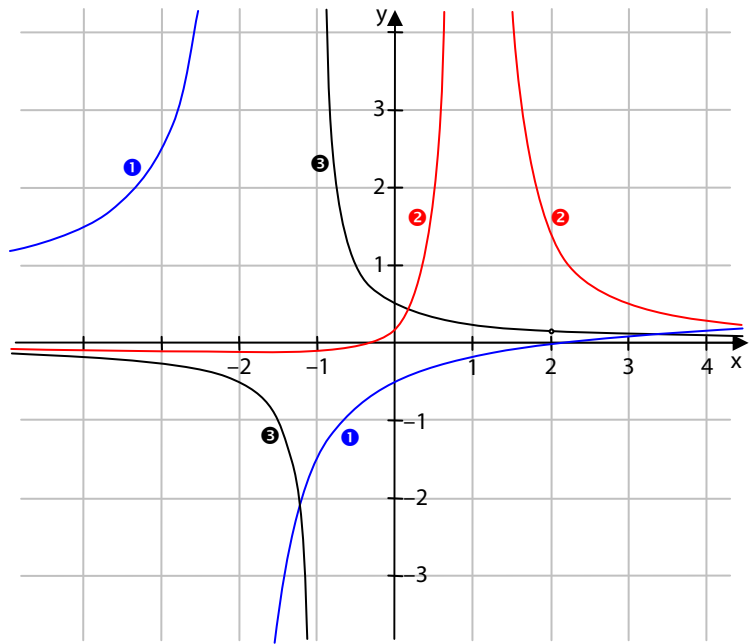
7

Erklären Sie, wie man am Term einer gebrochen rationalen Funktion f erkennen kann, dass keine waagerechte Asymptote vorliegt.

8

Welcher der Terme gehört zu den abgebildeten Graphen?

- a) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$
- b) $f(x)=\frac{3x+1}{5x^2-10x+5}$
- c) $f(x)=\frac{x}{x-1}$
- d) $f(x)=\frac{x+1}{(x-1)^2}$
- e) $f(x)=\frac{x-2}{2x^2-2x-4}$
- f) $f(x)=\frac{x-2}{2x+4}$



9

Zeichnen Sie jeweils die angegebenen Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie eine gebrochen rationale Funktion, deren Graph die Asymptoten besitzen könnte (ohne die Funktionsterme zu bestimmen).

- a) $x=1$; $y=2x-2$ b) $x=-4$; $x=-2$; $y=-2$

10

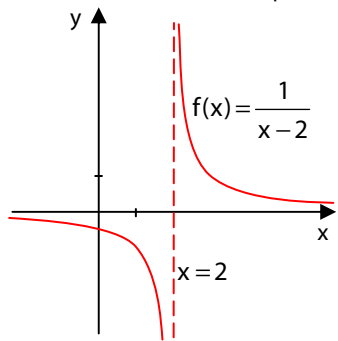
Bestimmen Sie die Definitionsmenge, untersuchen Sie die Symmetrie, bestimmen Sie die Asymptoten und Nullstellen und skizzieren Sie die Graphen

- a) $f(x)=\frac{1-x^2}{2x^2-1}$ b) $f(x)=\frac{1,5-2x}{4x-1}$ c) $f(x)=x-0,5+\frac{1}{4x+3}$ d) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$

Lösungen der Übungsaufgaben:

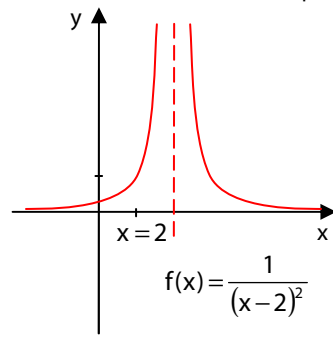
1

a) Polstelle mit VZW $-|+$



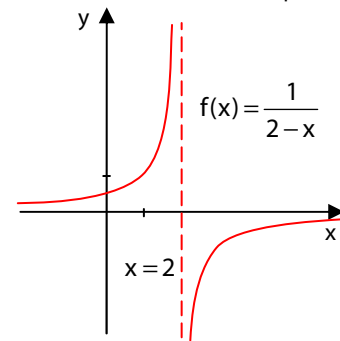
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

b) Polstelle ohne VZW $++$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

c) Polstelle mit VZW $+| -$

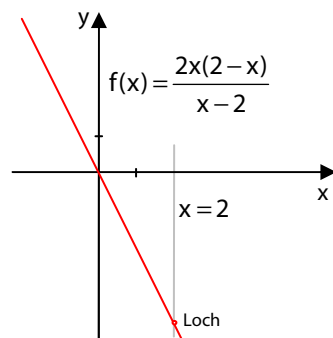


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

d) siehe b) denn

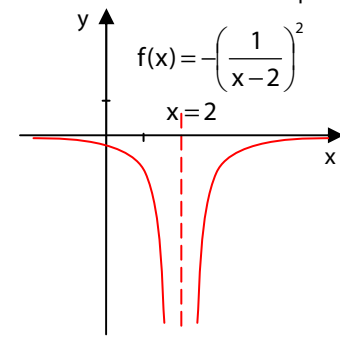
$$f(x) = \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

e) hebbare Lücke



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -4$$

f) Polstelle ohne VZW $-| -$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

2

Definitionslücke ohne Pol = hebbare Definitionslücke = Loch im Graph:

Der Term der Funktion weist eine Nullstelle $x=x_0$ im Nenner und im Zähler auf. Nach dem Faktorisieren kann man so kürzen, dass der neue Nenner diese Nullstelle nicht mehr hat.

3

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Nullst: $x = -2$

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Nullst: $x = \frac{1}{3}$

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$
Nullst: keine

d) $D_f = \mathbb{R}$
Nullst: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}$

e) $D_f = \mathbb{R}$
Nullst: $x = 0,4$

f) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 8\}$
Nullst: $x_1 = 0; x_2 = -3$

g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$
Nullst: keine

h) $D_f = \mathbb{R}$
Nullst: $x = \log_2 3 \approx 1,58...$

4

a) $x = 0,5; y = 0$

b) $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}; y = 2$

c) $x = -1,5; x = 5; y = 0,5$

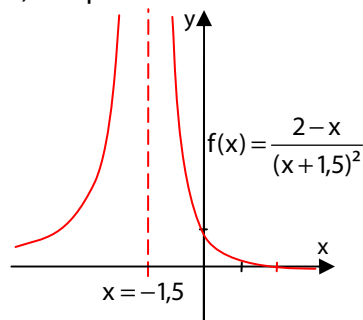
d) $x = 0; y = x$

e) $x = -1; y = 2x$

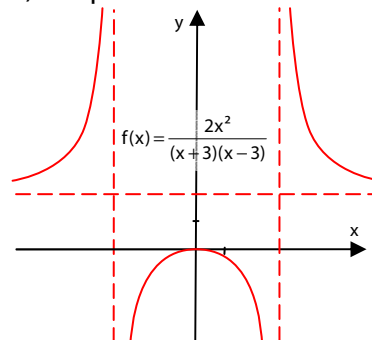
f) $x = -\frac{1}{3}$

5

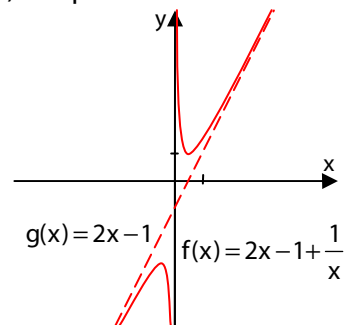
a) Beispiel:



b) Beispiel:



c) Beispiel:



6

a) $(x^2 + 2x - 3) \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x-1}$

b) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2(x+0,5)(x+1)}{(x-3)(x+1)}$ nach dem Kürzen: $\frac{2x+1}{x-3}$

7

Ist Zählergrad < Nennergrad, so ist die x-Achse die waagerechte Asymptote: $y=0$.

Ist Zählergrad = Nennergrad, dann gibt es eine andere waagerechte Asymptote: $y = k$.

Umkehrschluss:

Wenn der Grad des Zählerpolynoms einer Funktion f größer ist als der Grad ihres Nennerpolynoms, dann hat ihr Graph keine waagerechte Asymptote.

8

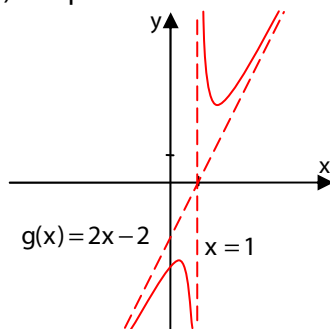
① blau: f), denn: Nullstelle $x=2$; Polstelle $x=-2$; Asymptote $y=0,5$

② rot: b), denn: Nullstelle $x = -\frac{1}{3}$; Asymptote $y=0$

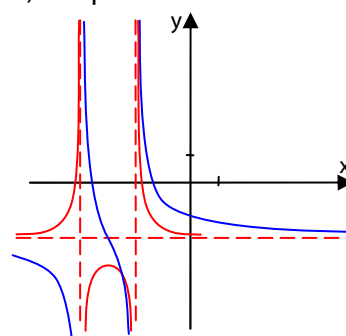
③ schwarz: e), denn: Polstelle $x = -2$; hebbare Definitionslücke= Loch bei $x=2$; Asymptote $y=0$

9

a) Beispiel:



b) Beispiele:



10

Funktion a) $f(x) = \frac{1-x^2}{2x^2-1}$

Definitionsmenge: $0=2x^2-1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}; x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$

Symmetrie: $f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{2(-x)^2-1} = \frac{1-x^2}{2x^2-1} = f(x) \rightarrow$

Achsensymmetrie zur y-Achse

Asymptoten • Zählergrad = Nennergrad $\rightarrow$ Es gibt eine waag. Asymptote:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^2}{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x^2}-1)}{x^2(2-\frac{1}{x^2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{2-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

• Nullstellen des Nenners sind nicht gleichzeitig Nullst. des Zählers $\rightarrow$ senkrechte Asymptoten:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und } x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Nullstellen: $0=1-x^2 \rightarrow x_1=1; x_2=-1$

b) $f(x) = \frac{1,5-2x}{4x-1}$

$0=4x-1 \rightarrow x=0,25 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,25\}$

keine Symmetrie

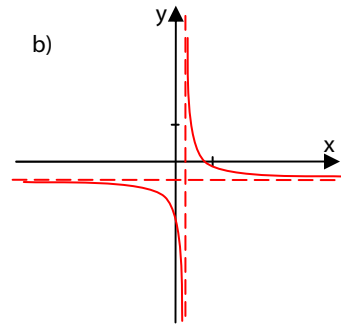
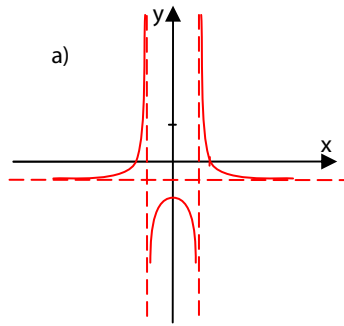
• Zählergrad = Nennergrad $\rightarrow$ Es gibt eine waag. Asymptote:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1,5-2x}{4x-1} = \frac{-2}{4} = -0,5 \rightarrow y = -0,5$$

• Nullstelle des Nenners ist nicht gleichzeitig Nullst. des Zählers $\rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x=0,25$

$0=1,5-2x \rightarrow x_0=0,75$

Skizze:



Funktion c) $f(x) = x - 0,5 + \frac{1}{4x+3}$

Definitionsmenge: $0 = 4x + 3 \rightarrow x = -0,75 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-0,75\}$

Symmetrie: keine Symmetrie

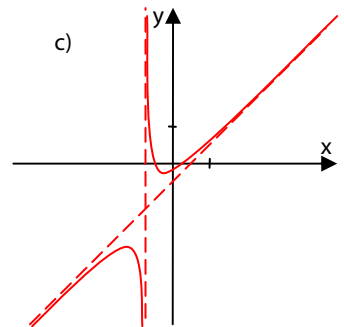
Asymptoten

- Direkt ablesbare schräge Asymptote (der Bruchterm $\rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$)
 $y = x - 0,5$
- senkrechte Asymptote:
 $x = -0,75$

Nullstellen: $0 = x - 0,5 + \frac{1}{4x+3} \rightarrow (-x + 0,5) \cdot (4x + 3) = 1$

$-4x^2 - x + 1,5 = 1 \rightarrow x_1 = -0,5 ; x_2 = 0,25$

Skizze:



d) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

$0 = x^2 + 1 \rightarrow$ keine Lösung $\rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-4x}{x^2+1} = -f(x) \rightarrow$

Punktsymmetrie zum Ursprung

- Zählergrad < Nennergrad $\rightarrow$ waagerechte Asymptote $y=0$:
- keine senkrechte Asymptote, da keine Definitionslücke vorhanden.

$0 = 4x \rightarrow x_0 = 0$

